CPE 332 Computer Engineering Mathematics II

Week 7

Part II, Chapter 6

Queuing System Continue

Extra: PRNG

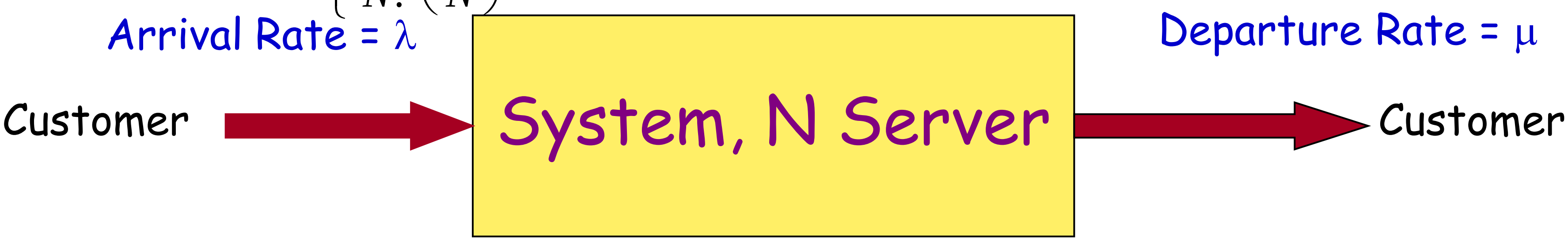
Topics

- Single Server, M/M/1
- Kendal Notation
- Applications

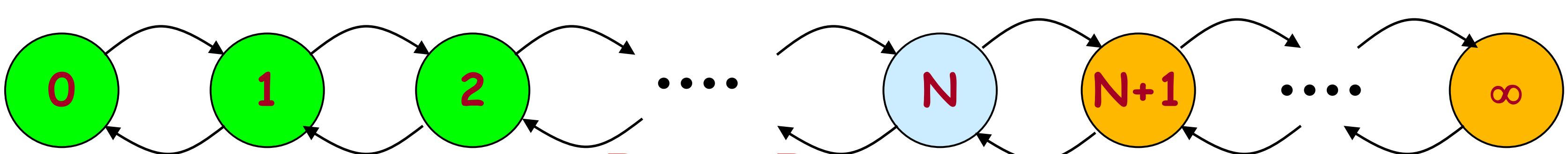
Queuing System Case 3: Delay System
Limited Server=N; With Unlimited Queue

$\lambda < \mu$

$$P[k] = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad p_x = \begin{cases} \frac{\rho^x}{x!} p_0; 0 \le x \le N \\ \frac{N^N}{N!}\left(\frac{\rho}{N}\right)^x p_0; x \ge N \end{cases} ; p_0 = \left[\frac{N\rho^N}{N!(N-\rho)} + \sum_{k=0}^{N-1}\frac{\rho^k}{k!}\right]^{-1} \quad P[T \ge t] = e^{-t/T_s}; T_s = 1/\mu$$



1. สมมุติว่า Customer แต่ละคนที่เข้ามาเป็น Poisson และได้รับการ Service จากระบบทันที
2. เวลาที่ใช้ในการ Service เป็น Random สมมุติว่าเป็น Exponential ด้วยเวลาเฉลี่ย T
3. ระบบสามารถรับ Customer ได้ไม่จำกัด แต่จะ Service ได้สูงสุด N พร้อมๆกัน
4. ถ้าทุก Server เต็ม Customer ใหม่จะต้องรอใน Queue ในกรณีนี้จะเกิด Queuing Delay
5. ระบบนี้เรียก M/M/N หรือ M/M/N/∞ แสดงได้ด้วย Simple Markov Model
6. State Probability จะมีการกระจายแบบ Second Erlang (Erlang C) Distribution



$$p_i P_{ij} = p_j P_{ji}$$

Queuing System Case 3: Delay System
Server=1; With Unlimited Queue; M/M/1

$\lambda < \mu$

$$p_0 = \left[\frac{\rho}{(1-\rho)} + 1 \right]^{-1} = 1 - \rho$$

$$P[k] = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

$$p_x = \rho^x (1-\rho)$$

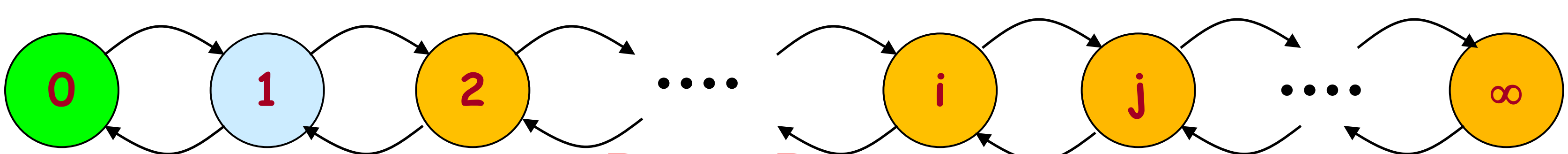
$$P[T \geq t] = e^{-t/T_s}; T_s = \frac{1}{\mu}$$

Arrival Rate = λ

Departure Rate = μ

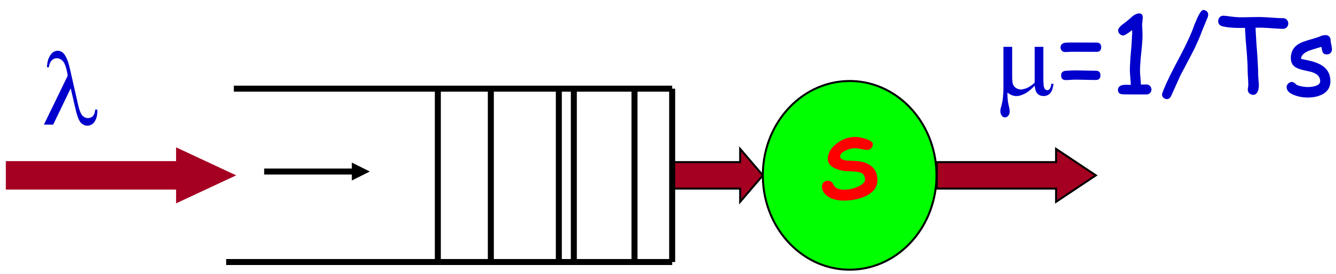
Customer → System, 1 Server → Customer

1. สมมุติว่า Customer แต่ละคนที่เข้ามาเป็น Poisson และได้รับการ Service จากระบบทันที
2. เวลาที่ใช้ในการ Service เป็น Random สมมุติว่าเป็น Exponential ด้วยเวลาเฉลี่ย T
3. ระบบสามารถรับ Customer ได้ไม่จำกัด แต่จะ Service ได้ครั้งละคน
4. ถ้าทุก Server เต็ม Customer ใหม่จะต้องรอใน Queue ในกรณีนี้จะเกิด Queuing Delay
5. ระบบนี้เรียก M/M/1 หรือ M/M/1/∞ แสดงได้ด้วย Simple Markov Model
6. State Probability จะมีการกระจายแบบ Second Erlang (Erlang C) Distribution



$$p_i P_{ij} = p_j P_{ji}$$

M/M/1: Summary



Arrival = Poisson, λ

Inter Arrival Time = Exponential, $1/\lambda$

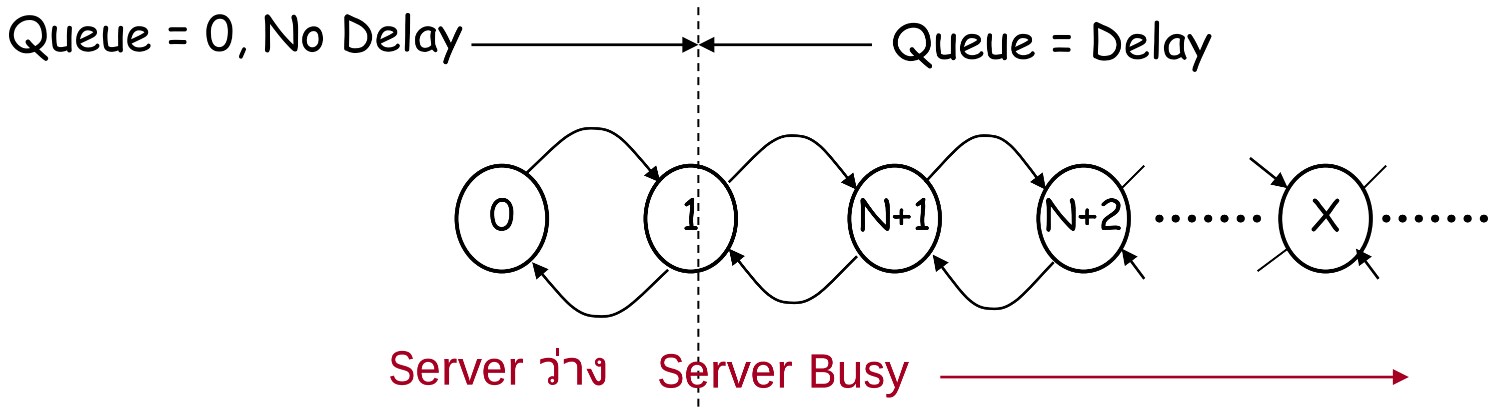
Service Rate, μ

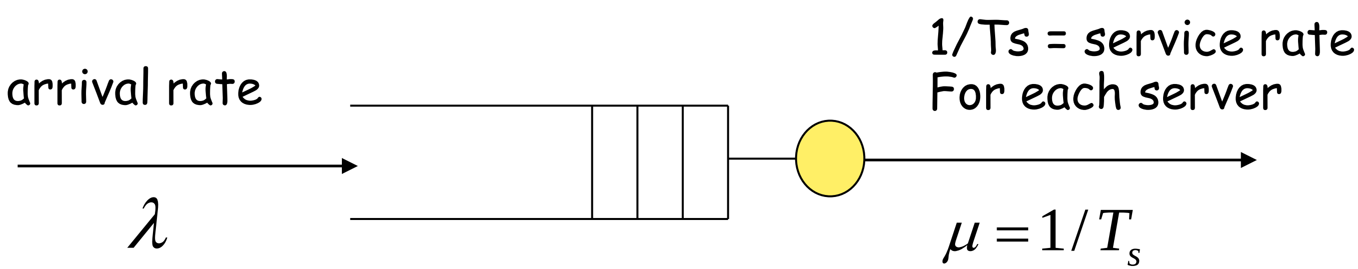
Service Time, Ts $(1/\mu)$ = Exponential

Queue = FIFO

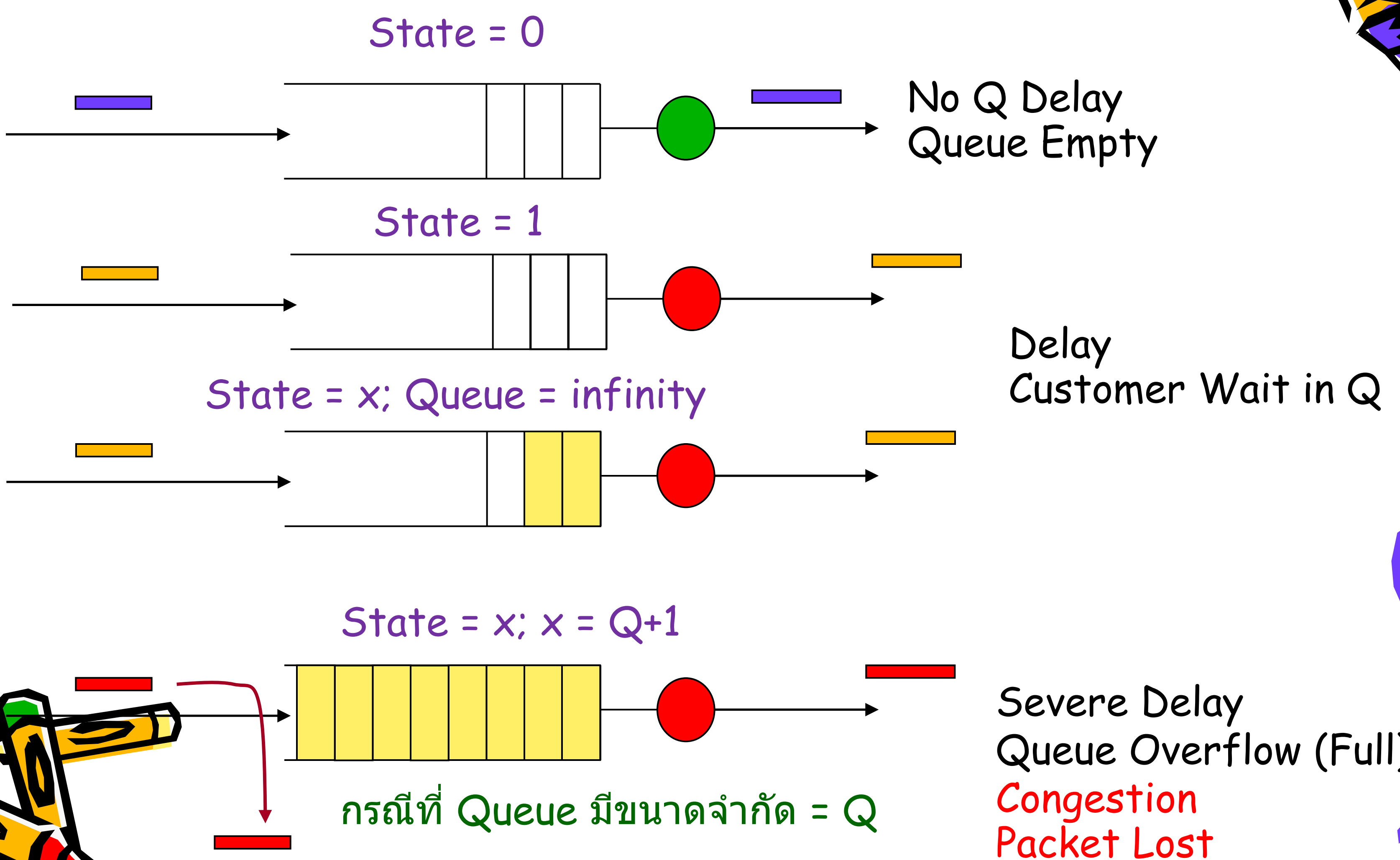
1 Server

Queuing Model(1 Server); M/M/1





การทำงานของ M/M/1



Kendal Notation

David Kendall[1] ได้คิดการให้ชื่อเพื่อจะอธิบายระบบ Queuing ซึ่งรู้จักกันในนามของ **Kendal Notation** ในรูปแบบดังนี้

$$A / B / c / K / m / Z$$

โดยที่

A หมายถึง Interarrival Time Distribution

B หมายถึง Service Time Distribution

c หมายถึงจำนวนของ Server

K หมายถึง System Capacity หรือ จำนวนของ Customer สูงสุดที่ยอมให้มีในระบบ

m หมายถึง จำนวนของ Population หรือ Source

Z หมายถึง Queue Discipline

Kendal Notation

ปกติที่เราเจอมักอยู่ในรูป Short Notation กล่าวคือ $A / B / c$ โดยสมมุติให้ความยาวของ Queue มีไม่จำกัด ($K = \infty$), จำนวนของ Source มีขนาดไม่จำกัด($m = \infty$) และ Queue Discipline เป็น FCFS(First-come first-serve) หรือ FIFO(First-in first-out)

Distribution ที่ใช้ใน A และ B คือ

GI	General Independent Interarrival Time
G	General Service Time
H_k	k-stage Hyperexponential Interarrival หรือ Service Time Distribution
E_k	Erlang-k Interarrival หรือ Service Time Distribution
M	Exponential Interarrival หรือ Service Time Distribution
D	Deterministic(Constant) Interarrival หรือ Service Time Distribution
U	Uniform Interarrival หรือ Service Time Distribution

Kendal Notation

ส่วนของ Queue Discipline ที่นิยมได้แก่

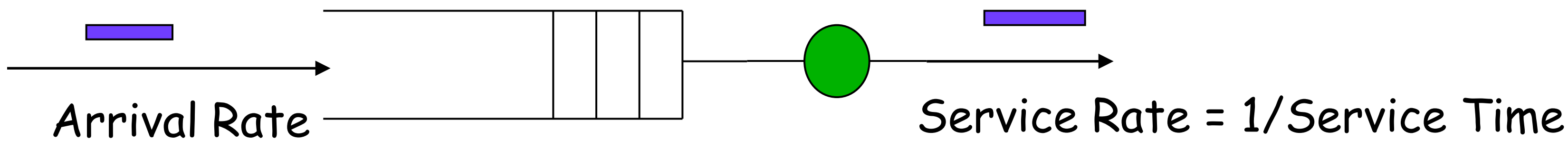
FCFS หรือ FIFO	First-come first-serve หรือ First-in first-out
LCFS หรือ LIFO	Last-Come First-Serve หรือ Last-in first-out
RSS หรือ SIRO	Random selection for service หรือ Service-in-random order
PRI	Priority Service

Analysis ฉุดฉุ M/M/1

- สมมุติตอนแรกว่า Queue มีขนาดไม่จำกัด
- ใช้ M/M/1 ในการ Model แต่ละ Port ของ Router (หรือ Switch L3)
- Arrival คือจำนวน Packet ที่เข้ามาในช่วงเวลาหนึ่ง ปกติวัดเป็น pps
- ขนาดของ Packet สมมุติว่าไม่แน่นอน แต่มีการกระจายแบบ Exponential
  - Service Time ของแต่ละ Packet จะเป็น Exponential ด้วย ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับค่า Link Speed ของ Output Port
- ค่า Server Utilization เท่ากับอัตราส่วนของ Arrival Rate หารด้วย Service Rate จะบ่งบอกอัตราส่วนที่ Server จะ Busy และคือ Link Utilization ของ Output Port ด้วย

$$\rho = \lambda / \mu$$

Queuing in Communication NW and M/M/1



λ

$$\mu = 1/T_s$$

$$\rho = \lambda / \mu = \lambda T_s$$

Example

- Router ได้รับ Packet เฉลี่ย 8 pps
  - ความยาวของ Packet มีการกระจายแบบ Exponential ด้วยความยาวเฉลี่ย 500 Octet
  - Link ที่จะส่งออกไป มีความเร็ว 64 kbps
- 1. Arrival Rate, λ = 8 pps
- 2. ความยาวเฉลี่ยของ Packet = 4000 bit
- 3. ความเร็ว Link = 64 k ดังนั้น Service Time, Ts ของแต่ละ Packet = 4000/64k = 1/16
- 4. Service Rate(μ) = 16 pps
- 5. Server Utilization = 8/16 =0.5 = 50%

Assumption

- 1. อย่าลืมว่า Packet ที่เข้ามา ต้องเป็น Independent และ Random มันจึงเป็น Poisson
- 2. ความยาวของ Packet จะสมมุติว่าเป็น Exponential ดังนั้น Service Time จะเป็น Exponential ด้วย แม้ว่าสมมุติฐานนี้จะไม่ถูกต้องนัก
- 3. มี Output Link เดียว คือเป็น Single Server
- 4. ดังนี้แล้ว จึงจะเป็น M/M/1

Utilization

- Utilization บอกอัตราส่วนที่ Server จะ Busy และสัมพันธ์กับ Probability ที่ Queue จะว่าง
  - Probability ที่ Server ว่าง $1-\rho$
- ใน Network คือคือ Probability ที่ Output Link จะ Busy ด้วย

$$\boxed{\rho = \lambda / \mu = \lambda T_s}$$

Arrival Rate

- เนื่องจาก Arrival Rate มีการกระจายแบบ Poisson ดังนั้นถ้าให้ λ เป็นอัตราเฉลี่ยของ Customer (Packet) ที่เข้ามาในช่วงเวลา 1 วินาที
  - Probability ที่จะมี k customer (Packet) เข้ามาในช่วงเวลา T วินาทีจะหาได้จาก

$$p(X=k)=p(k)=\frac{(\lambda T)^k e^{-\lambda T}}{k!}$$

$$p(0)=e^{-\lambda T}$$

Service Time

- T_s เป็น Service Time เฉลี่ย และ Service Rate หาได้จาก $\mu = 1/T_s$
- เนื่องจาก Service Time เป็น Random Variable ที่มีการกระจายแบบ Exponential ดังนั้น Probability ที่ Service Time จะมีค่าน้อยกว่า T จะเป็น

$$p(t < T) = 1 - e^{-T/T_s}$$

Queue Distribution

- การกระจายของ Customer (State Probability) สามารถคำนวณได้จาก Probability ที่ ระบบ จะมี k Packet อยู่ดังนี้

$$p_k = p_0(\lambda T_s)^k$$

- โดยที่ p_0 คือ Probability ที่ ระบบ จะว่าง

$$p_0 = 1 - \rho = 1 - \lambda T_s$$

- ดังนั้น เราได้ $p_k = (1 - \lambda T_s)(\lambda T_s)^k = (1 - \rho)\rho^k$
- กล่าวคือ การกระจายของ Customer ในระบบ หรือค่า State Probability จะเป็น Geometric Distribution

[illegible] Customer [illegible], N
[illegible] State, $E[X]$

จาก $P[X = x] = p_x = (1-\rho)\rho^x$ เราได้

$$E[X] = \sum_{x=0}^{\infty} x\, p_x = (1-\rho)\sum_{x=0}^{\infty} x\rho^x$$

แต่จาก (CPE231) $\sum_{x=0}^{\infty} x\rho^{x-1} = \frac{1}{(1-\rho)^2}$

ดังนั้น

$$[X] = (1-\rho)\rho\sum_{x=0}^{\infty} x\rho^{x-1} = \frac{\rho}{1-\rho}$$

Queuing Delay

- จาก Geometric Distribution ค่าเฉลี่ยคือจำนวน Customer เฉลี่ย คือจำนวน Packet เฉลี่ยในระบบ จะหาได้จาก

$$N = \frac{\rho}{1-\rho}$$

- ถ้าคิดเฉพาะจำนวน Customer เฉลี่ยใน Queue เราจะได้

$$N_Q = N - \rho = \frac{\rho}{1-\rho} - \rho = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

Queuing Delay

- สำหรับ Network ค่าเฉลี่ย จำนวน Packet เฉลี่ยใน ระบบ และใน Queue จะหาได้จาก

$$N = \frac{\rho}{1-\rho} \qquad N_Q = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

- ถ้าแต่ละ Packet ต้องใช้เวลาเฉลี่ยในการ Service T_s ดังนั้น ค่า Queuing Delay จะเป็น

$$W = \frac{\rho T_s}{1-\rho} = \frac{\rho}{\mu - \lambda}$$

System Delay

- แต่ละ Packet ต้องใช้เวลาเฉลี่ยในการ Service T_s ดังนั้น ค่า Queuing Delay จะเป็น

$$W = \frac{\rho T_s}{1-\rho} = \frac{\rho}{\mu - \lambda}$$

- และเวลาเฉลี่ยทั้งหมดที่ลูกค้าจะต้องรอในระบบทั้งหมดจะเป็น

$$T = W + T_s = \frac{\rho}{\mu - \lambda} + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

Little's Theorem

- ถ้า T เป็นเวลาเฉลี่ยที่ลูกค้าอยู่ในระบบ และ λ เป็น Arrival Rate ดังนั้นจำนวนลูกค้าเฉลี่ยในระบบจะเท่ากับ

$$N = \lambda T$$

$$N_Q = \lambda W$$

สรุป M/M/1

I. Notations

p_n : เป็นค่า Steady-state probability ที่จะมี n customer ในระบบ

λ : เป็นค่า Arrival rate(เป็นค่าส่วนกลับของค่าเฉลี่ยของ inter arrival time)

μ : ค่า Service rate(ส่วนกลับของค่าเฉลี่ยของ service time) $= 1/T_s$

N : ค่าเฉลี่ยของจำนวนของ Customer ในระบบ

N_Q : ค่าเฉลี่ยของจำนวนของ customer ที่รอใน Queue

T : ค่าเฉลี่ยของเวลาของ Customer ที่อยู่ในระบบ

W : ค่าเฉลี่ยของเวลาที่ Customer ต้องรอใน Queue ไม่รวม Service Time

$\overline{X}$: ค่าเฉลี่ยของ Service Time

$\overline{X^2}$: Second Moment ของ Service Time

สรุป M/M/1

II. Little's Theorem

$$N = \lambda T$$

$$N_Q = \lambda W$$

III. Poisson Distribution with Parameter m

$$p_n = \frac{e^{-m} m^n}{n!}, \quad n = 0,1,\ldots$$

$$\text{mean} = \text{variance} = m$$

IV. Exponential Distribution with Parameter λ

$$P[\tau \le s] = 1 - e^{-\lambda s}, \quad s \ge 0$$

Density: $p(\tau) = \lambda e^{-\lambda \tau}$

Mean: $= 1/\lambda$

Variance $= 1/\lambda^2$

สรุป M/M/1

(a) Utilization Factor (อัตราส่วนของเวลาที่ Server Busy)

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

(b) Probability ที่จะมี n customer ในระบบ

$$p_n = \rho^n(1-\rho), \quad n = 0,1,\ldots$$

(c) จำนวนเฉลี่ยของ Customer ในระบบ

$$N = \frac{\rho}{1-\rho}$$

(d) เวลาเฉลี่ยของ Customer ในระบบ

$$T = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)} = \frac{1}{\mu-\lambda}$$

(e) จำนวนเฉลี่ยของ Customer ใน Queue

$$N_Q = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

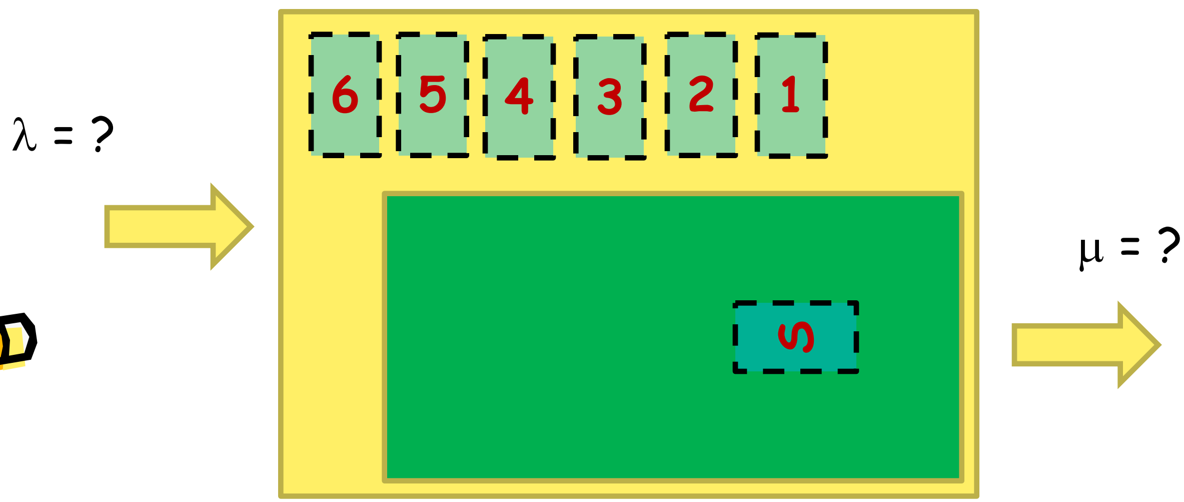
(f) เวลาเฉลี่ยที่ต้องรอใน Queue ของ Customer

$$W = \frac{\rho}{\mu-\lambda}$$

M/M/1 Example 1

Examples (M/M/1)

1. สถานีรับจ้างล้างรถอัตโนมัติแห่งหนึ่ง จากการรวบรวมข้อมูลของรถที่เข้ามารับบริการ พบว่าจำนวนรถที่เข้ามามีการกระจายแบบ Poisson โดยมีอัตราเฉลี่ย 4 คัน ต่อชั่วโมง เวลาที่ใช้ในการล้างรถแต่ละคันพบว่ามีการกระจายแบบ Exponential โดยมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 10 นาทีต่อหนึ่งคัน และการล้างรถมีเพียง 1 Line กล่าวคือจะล้างได้เพียงครั้งละหนึ่งคันเท่านั้น จงหา (1) Probability ที่รถที่เข้ามาใช้บริการจะต้องรอการใช้บริการ (2) ถ้าทางร้างจัดที่จอดรถให้ลูกค้าที่รอการใช้บริการไว้จำนวน 6 คัน จงหา Probability ที่รถที่เข้ามาใช้บริการจะไม่สามารถจอดรถรอได้



M/M/1 Example 1

<u>คำตอบ</u>

- จากที่โจทย์กำหนด กล่าวคือ Arrival เป็น Poisson Distribution, Service เป็น Exponential Distribution และความสามารถที่จะบริการล้างรถได้ทีละ 1 คัน เราสรุปได้ว่าระบบจะเป็น M/M/1 Model
- ในกรณีนี้เราจำเป็นต้องหาค่าเฉลี่ย 2 ตัว และสองตัวเท่านั้น กล่าวคือค่าเฉลี่ยของ Arrival Rate หรือ λ และค่าเฉลี่ยของ Service Rate คือ μ ที่สำคัญในการคิดคือ ต่อหน่วยเวลาจะต้องเท่ากัน ในกรณีของข้อนี้จะคิดเป็นต่อชั่วโมง(กรณีอื่นๆอาจจะเป็น ต่อวินาที, ต่อ 5 นาที หรืออื่นๆตามความเหมาะสม) เมื่อได้ 2 ตัวนี้แล้วก็สามารถจะแทนค่าไปในสูตรอื่นๆที่ให้มาข้างต้นได้หมด
- จากข้อมูลที่โจทย์ให้เราได้ $\lambda = 4$ คันต่อชั่วโมง และ $\mu = 60/10 = 6$ คันต่อชั่วโมง
- เมื่อแทนค่าตามสูตรเราได้ดังนี้
    - ➢ Utilization Factor (อัตราส่วนของเวลาที่ Server Busy)

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 4/6 = 2/3 = 0.6667$$

M/M/1 Example 1

- Probability ที่จะมี n customer ในระบบ

$$p_n = \rho^n(1-\rho), \quad n = 0,1,\ldots = (2/3)^n(1/3)$$

- จำนวนเฉลี่ยของ Customer ในระบบ

$$N = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{2/3}{1/3} = 2 \text{ คัน}$$

- เวลาเฉลี่ยของ Customer ในระบบ

$$T = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)} = \frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{1}{6-4} = 1/2$$ ชั่วโมง หรือ 30 นาที(สังเกตหน่วย เป็นชั่วโมง)

M/M/1 Example 1

- จำนวนเฉลี่ยของ Customer ใน Queue

$$N_Q = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{4/9}{1/3} = \frac{4}{3} = 1.3333 \text{ คัน}$$

- เวลาเฉลี่ยที่ต้องรอใน Queue ของ Customer

$W = \dfrac{\rho}{\mu-\lambda} = \dfrac{2/3}{6-4} = \dfrac{1}{3}$ ชั่วโมง = 20 นาที ค่านี้คือเวลาเฉลี่ยสำหรับเฉพาะใน Queue เท่านั้น คือเวลาที่ลูกค้าต้องรอก่อนที่จะได้รับบริการ ไม่ใช่เวลาเฉลี่ยทั้งหมดในระบบ ซึ่งค่าเฉลี่ยทั้งหมดในระบบต้องบวกกับค่าเฉลี่ยของ Service Time กล่าวคือ 10 นาที เป็น 30 นาที(ค่า T) ซึ่งคำนวณให้ดูก่อนหน้านี้แล้ว

M/M/1 Example 1

- คำตอบคำถามที่ (1) โจทย์ต้องการให้คำนวณ Probability ที่รถเข้ามาใช้บริการจะต้องรอใน Queue กล่าวคือ รถที่เข้ามาจะต้องรอก็ต่อเมื่อมีรถคันอื่นก่อนหน้านี้กำลังใช้บริการอยู่ ถ้าไม่มีรถในระบบเลย รถที่เข้ามาจะไม่ต้องรอ และสามารถใช้บริการได้ทันที นั่นคือเราต้องการหา Probability ที่จะมีรถ 1 คัน หรือมากกว่าในระบบ

  หรือ $P[X \geq 1] = \sum_{n=1}^{\infty} P_n$ ในกรณีนี้จะหาได้ง่ายกว่าถ้าเราใช้กฎของ Probability

  โดย $P[X \geq 1] = 1 - P[X < 1] = 1 - P[0] = 1 - P_0 = 1 - (2/3)^0(1/3) = 0.6667$

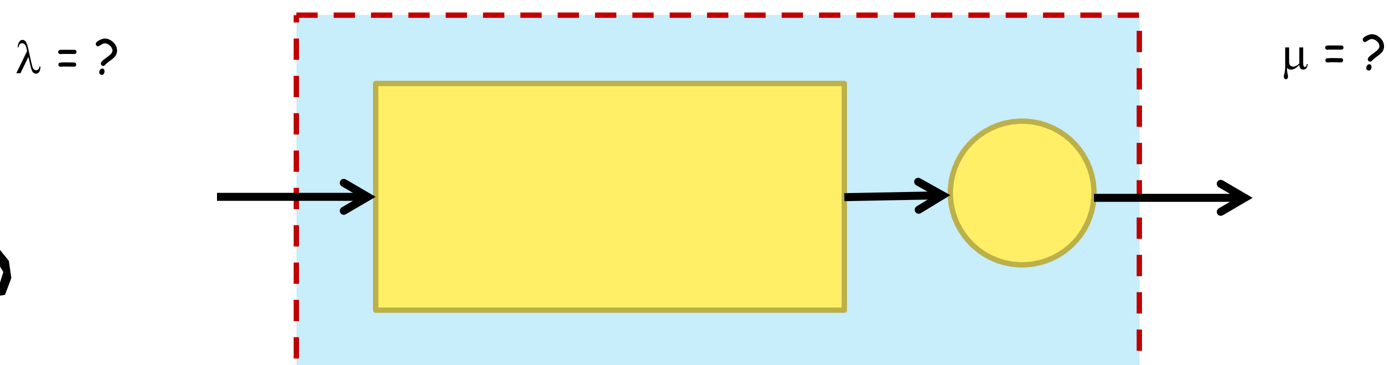
- คำตอบคำถามที่ (2) ในกรณีนี้รถที่รอเป็นคันที่ 7 จะไม่มีที่จอด นั่นก็คือมีรถจอดอยู่แล้ว 6 คัน รวมกับรถที่กำลังให้บริการ 1 คัน ดังนั้นถ้ามีรถอยู่แล้ว 7 คัน หรือ มากกว่า รถที่เข้ามาต่อไปจะไม่มีที่จอด นั่นก็คือ โจทย์ต้องการให้เราหา $P[X \geq 7] = 1 - P_0 - P_1 - \ldots - P_6$ ให้ลองใช้ MATLAB คำนวน จะได้ค่าเท่ากับ 1 – 0.94147 = 0.05853

- หมายเหตุ ข้อ(2) อาจจะคิดจาก $P[X \geq 7] = \sum_{n=7}^{\infty} P_n = \sum_{n=7}^{\infty} \rho^n(1-\rho) = (1-\rho)\sum_{n=7}^{\infty} \rho^n$

$$= (1-\rho)\sum_{k=0}^{\infty} \rho^{k+7} = (1-\rho)\rho^7\sum_{k=0}^{\infty} \rho^k = (1-\rho)\rho^7 \frac{1}{1-\rho} = \rho^7 = (2/3)^7 = 0.05853$$

M/M/1 Example 2

2. สาขาย่อยของธนาคารแห่งหนึ่งตั้งไว้ที่ศูนย์การค้า ประกอบด้วยเจ้าหน้าที่รับบริการ(Teller)หนึ่งคน จากการเก็บข้อมูลลูกค้าที่มาใช้บริการพบว่าเฉลี่ยแล้วมีผู้เข้ามาใช้บริการชั่วโมงละ 10 คน โดยการเข้ามาของลูกค้าเป็น Random และมีการกระจายแบบ Poisson และลูกค้าแต่ละคนเฉลี่ยแล้วจะใช้บริการ เป็นเวลา 5 นาที โดยระยะเวลาการใช้งาน จัดว่าเป็น Random เช่นกัน แต่มีการกระจายแบบ Exponential ธนาคารได้จัดที่นั่งไว้ 3 ที่สำหรับผู้ที่มารอ(รวมถึงผู้ที่กำลังใช้บริการด้วย) ที่เหลือจะต้องยืนรอ (1) จงหา Probability ที่ลูกค้าเมื่อเข้ามาจะได้นั่ง (2) จงหา Probability ที่ลูกค้าที่เข้ามาจะต้องยืนรอ (3) ฉลี่ยแล้วลูกค้าที่เข้ามาจะต้องรอเป็นเวลานานเท่าไรก่อนที่จะได้รับบริการ (4) ธนาคารควรจะต้องจัดที่นั่งไว้เท่าไรเพื่อจะให้แน่ใจว่าอย่างน้อย 80% ของลูกค้าที่เข้ามาใช้บริการจะมีที่นั่งรอได้ทันที



M/M/1 Example 2

<u>คำตอบ</u>

Model นี้เช่นกันจัดได้ว่าเป็น M/M/1(ในชั้นนี้จะเจอแต่ M/M/1, M/M/N, M/M/N/N)

ก่อนอื่นหาค่าที่ต้องการ 2 ตัวคือ λ และ μ

$\lambda = 10$ คนต่อชั่วโมง $\mu = 60/5 = 12$ คนต่อชั่วโมง

จากนั้นคำนวณ $\rho = \mu/\lambda = 5/6$

(1) ถ้ามีลูกค้าอยู่ในระบบ 2 คนหรือน้อยกว่า ลูกค้าที่เข้ามาใหม่จะได้ที่นั่ง ดังนั้น

$$P[X \le 2] = P[0] + P[1] + P[2]] = (1/6)[1 + 5/6 + 25/36] = 0.421$$

(2) จากข้อ (1) เราต้องการ $P[X > 2] = 1 - P[X \le 2] = 1 - .421 = .579$

(3) $W = \dfrac{\rho}{\mu - \lambda} = \dfrac{5/6}{12-10} = \dfrac{5}{12}$ ชั่วโมง หรือ 25 นาที

4.ธนาคารต้องจัดที่นั่งกี่ที่(รวมที่นั่งตอนใช้บริการ)เพื่อจะให้แน่ใจว่าอย่างน้อย 80% ของผู้ที่เข้ามาจะได้นั่ง

- สมมุติให้มีที่นั่งทั้งหมด = x ที่
- ถ้าระบบอยู่ที่ State x-1 ลงมา ลูกค้าที่เข้ามาใหม่จะได้นั่ง
- เราต้องการ P[ระบบอยู่ที่ State $\leq$ x-1] > 0.8

หรือ P[State < x] > 0.8

หรือ 1-P[State $\geq$ x] > 0.8

หรือ P[State $\geq$x] $\leq$ 0.2 กล่าวคือ $\rho^x \leq 0.2$

มีวิธีเดียวในการแก้ อสมการนี้คือใช้ Log

4.ธนาคารต้องจัดที่นั่งกี่ที่(รวมที่นั่งตอนใช้บริการ)เพื่อจะให้แน่ใจว่าอย่างน้อย 80% ของผู้ที่เข้ามาจะได้นั่ง

หรือ P[State ≥x] ≤ 0.2 กล่าวคือ $\rho^x \leq 0.2$

มีวิธีเดียวในการแก้ อสมการนี้คือใช้ Log

$$\mathrm{Log}(\rho^x) \geq \log(0.2)$$

Note:เนื่องจากค่าติดลบ ต้องกลับเครื่องหมาย

$$x \ \log \rho \geq \log 0.2$$

ใช้ Natural Log(ความจริงจะใช้ Log ฐานอะไรก็ได้)

$$x \log 5/6 \geq \log 0.2$$

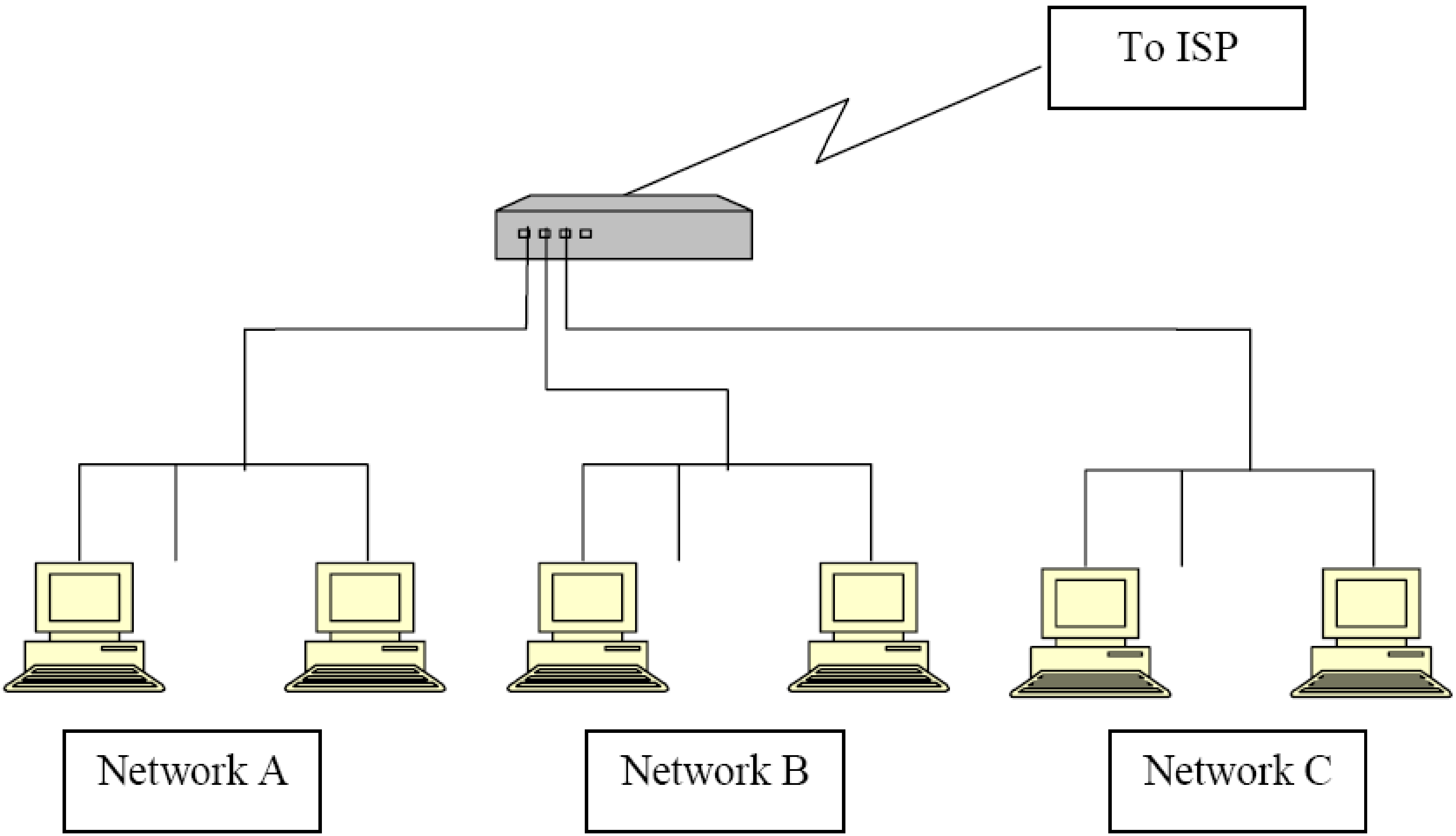
$$x \geq \frac{-1.60944}{-0.18232} = 8.8275$$

เนื่องจากคำตอบต้องเป็นจำนวนเต็ม และจากเครื่องหมายมากกว่าหรือเท่ากับ ดังนั้น $x = 9$

M/M/1 Example 3

3. ในระบบ Network ของสำนักงานแห่งหนึ่ง ทำการแบ่ง Network ออกเป็น 3 Subnet ดังรูป ซึ่ง Network ของสำนักงานแห่งนี้จำเป็นที่จะต้องมีการต่อออก Internet ผ่าน Router เชื่อต่อกับ ISP และจากการใช้ Network Tool จับ Internet Traffic ขาออก พบว่า Network A มีอัตรา Packet เฉลี่ย 300 pps(Packet Per Second), Network B มีอัตราเฉลี่ย 500 pps และ Network C มีอัตราเฉลี่ย 600 pps โดยที่ลักษณะการเข้ามาของ Packet มีการกระจายแบบ Poisson นอกจากนี้แล้ว ยังพบว่าขนาดของแต่ละ Packet มีขนาดไม่แน่นอน แต่สามารถประมาณได้ว่ามีการกระจายแบบ Exponential โดยมีความยาวเฉลี่ย 500 Octet, สาย Lease Line ที่เช่าต่อระหว่าง Router และ ISP มีอัตราความเร็วที่ 8 Mbps และ Router มีการทำงานในระดับ Wire-speed จงคำนวณ (1) Link Utilization(Uplink) ของสาย Lease Line (2) ค่า Delay เฉลี่ยในส่วนของ Uplink (3) สมมุติว่าอุปกรณ์ Router มี Queue ที่มีความสามารถเก็บได้เฉลี่ย 10 Packet จงคำนวณหา % Packet Drop อันเนื่องมาจาก Queue Overflow ที่อุปกรณ์ Router

M/M/1 Example 3



M/M/1 Example 3

<u>คำตอบ</u>

สังเกตุว่าแม้ว่า Output Speed จะมีอัตราคงที่คือ 8 Mbps แต่ขนาด Packet เป็น Exponential Distribution ดังนั้น Service Time จะเป็น Exponential Distribution ด้วย

$\lambda = 300 + 500 + 600 = 1400$ packet ต่อวินาที(pps)

$\mu = \dfrac{8{,}000{,}000}{500 \times 8} = 2000$ packet ต่อวินาที(pps)

1. $\rho = \dfrac{1400}{2000} = 0.7$ เป็นค่า Utilization ของ Server/
2. Delay เราวัดเริ่มจาก Packet เข้ามาจนกระทั่งออกไ
   ดังนั้น เราใช้สมการ $T=1/(\mu-\lambda) = 1/600 = 1.6667$
3. Queue มีขนาด 10 Packet รวมกับอีกหนึ่งที่ Serve
   $P[X>= 10+1] = 0.70^{11} = 0.019773 = 1.9773\%$

End of Chapter 6

- HW6 Due Monday Noon
  - ส่งที่พี่หนึ่งเท่านั้น ก่อนเที่ยง จันทร์ 29 ก.พ.
  - ใส่ตะกร้า หน้าโต๊ะ Counter อย่าส่งผิดที่
  - เฉลยจะประกาศวันถัดไปบน Web
- Next
  - Random Number Generator
  - Preparation for Midterm Exam

Topics

- Random Number and Properties
- Random Number Test
- Pseudo Random Number Generator
- **MT Exam Preparation**

Random Number

- Random Number เป็น Set ของตัวเลขที่สุ่มขึ้นมาแบบอิสระ(Random) และไม่ขึ้นต่อกัน (Independent) โดยมีค่าการกระจาย (Distribution) ของชุดตัวเลข ตามที่กำหนดแบบใดแบบหนึ่ง
- เลขแต่ละตัวที่สุ่มจะต้องไม่มีความสัมพันธ์กัน ทดสอบได้จากค่า Correlation

[illegible] Random Number

- Gambling
- Statistical Sampling
- Simulation
- Cryptography
- Computer Games
- Hash Algorithm/Searching Algorithm

Random Number Generation

- เป็นอุปกรณ์ที่ใช้เป็นตัวกำเนิดชุดของตัวเลข Random ที่ต้องการ
  - True Random Number Generator(TRNG)
    - ประกอบด้วยอุปกรณ์ทาง Physic ที่ใช้กำเนิดตัวเลข
    - มักจะได้จากแหล่งกำเนิดของ Noise ที่เกิดตามธรรมชาติ
      - Thermal Noise/Shot Noise/Radioactive
    - หรือใช้ Roulette Wheel
  - Pseudo Random Number Generator(PRNG)
    - Computational Algorithm จากสมการทางคณิตศาสตร์ โดยเริ่มจากตัวเลข "Seed"
    - มีคุณสมบติเหมือนกับเป็น Random แต่มี Period และสามารถคำนวณล่วงหน้าตามสมการได้

PRNG: Pseudo Random Number Generator: Linear Congruential Generator

- เริ่มจาก “Seed”, X_0 และคำนวณ Series $X_1, X_2, X_3, \ldots$ จากสมการ Recurrence

$$X_{n+1} = (aX_n + b) mod\, m$$

- *a*, *b* และ *m* เป็น Integer ปกติจะมีขนาดใหญ่; จำนวนเลขสูงสุดที่ไม่ซ้ำกันจะถูกกำหนดด้วยค่า Modulus *m*
  - Sequence ที่ได้จะมีค่าระหว่าง [0,m) หรือ $0 \le X < m$
  - Seed $X_0; 0 \le X_0 < m$
  - Multiplier $a;\ 0 < a < m$
  - Increment $b; 0 \le b < m$
  - ถ้า b = 0 เราเรียก Multiplicative Congruential Generator หรือ Lehmer Generator มิฉะนั้นแล้วเราเรียก Mixed Congruential Generator
- ตัวเลขที่ได้จะมีการกระจายแบบ Uniform ถ้าต้องการการกระจายแบบอื่น จะใช้การ Transformation
- Algorithm นี้เรียก LCG หรือ Linear Congruential Generator เป็นวิธีที่ง่ายในการสร้าง PRN

Period of LCG

- Period มีค่าได้สูงสุดคือ m เรียก Full Period
  - บางกรณีจะได้น้อยกว่านั้น ขึ้นอยู่กับการเลือกค่า 'a' และในกรณีที่ b=0
- Generator จะมี Full Period ก็ต่อเมื่อ (Hull-Dobell Theorem)
  - 1. b และ m เป็น Relative Prime
  - 2. a-1 จะต้องสามารถหารได้ด้วยทุกๆ factor ที่เป็นค่า prime ของ m
  - 3. a-1 จะต้องหารได้ด้วย 4 ถ้า m หารได้ด้วย 4

Parameters used

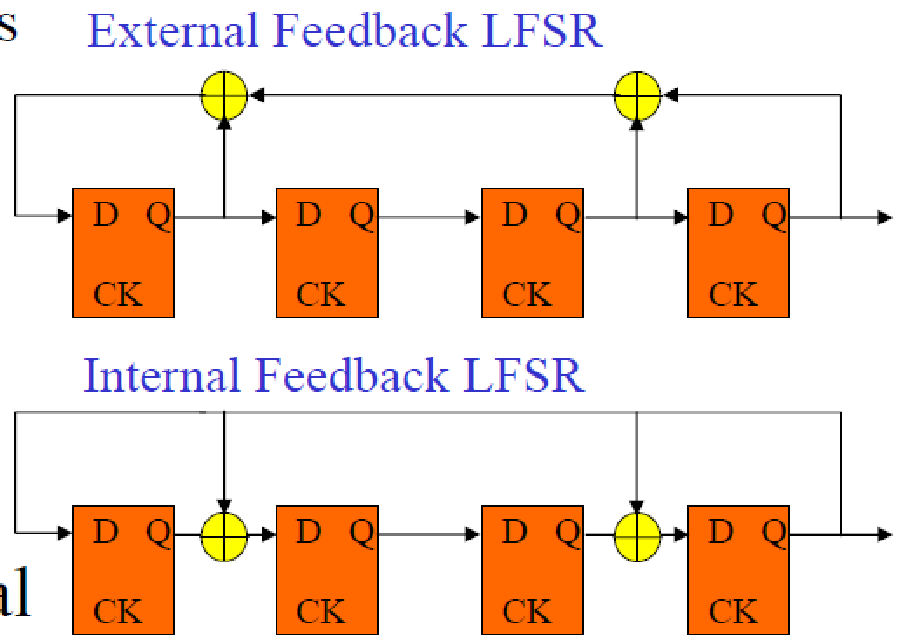
- ส่วนใหญ่จะใช้ LCG ที่ m มีค่าเป็นกำลังของ 2 ที่นิยมมากสุดคือ 2^{32} และ 2^{64}
  - MS Visual C++ ใช้ $m=2^{32}$, $a=214013$, $b=2531011$
  - MS Visual Basic 6 ใช้ $m=2^{24}$, $a=1140671485$, $b=12820163$

[illegible] LCG

- มีข้อดีคือคำนวณได้ง่าย แต่ให้ Series ของ Random Number ที่มีคุณสมบัติพอประมาณเท่านั้น เพราะให้ค่า Serial Correlation สูง
  - ไม่เหมาะกับการนำไปใช้ใน Monte Carlo Simulation
  - ไม่เหมาะกับการนำไปใช้ใน Cryptography
- สามารถสร้างได้จากวงจร Linear Feedback Shift Register(LFSR)
  - ปกติวงจรนี้จะผลิต Stream ของ bit
- ได้ Uniform Distributed PRNG

Linear Feedback Shift Registers (LFSRs)

- Efficient design for Test Pattern Generators & Output Response Analyzers (also used in CRC)
  - FFs plus a few XOR gates
  - better than counter
    - fewer gates
    - higher clock frequency
- Two types of LFSRs
  - External Feedback
  - Internal Feedback
    - higher clock frequency
- Characteristic polynomial
  - defined by XOR positions
  - $P(x) = x^4 + x^3 + x + 1$ in both examples



PRNG [illegible]

- Blum Blum Shub
- Wichmann-Hill
- Multiply with Carry
- Mersenne Twister (นิยมมากสุด)
- Park-Miller
- RC4
- Rule 30

Randomness Test

- เพื่อหา Pattern ในชุด หรือ Series ของตัวเลข
  - ซึ่งไม่ควรจะมีอยู่ถ้าชุดตัวเลขเป็น Random และ Independent อย่างแท้จริง
- ใช้ในการทดสอบ และเปรียบเทียบ Algorithm ต่างๆ ที่ใช้ผลิต PRNG โดยใช้พื้นฐานจาก
  - Statistical Test ทดสอบจากคุณสมบัติทางสถิติ
    - **Diehard Tests** ประกอบด้วยชุดของ Test
    - **TestU01** library ประกอบด้วย utilities สำหรับ statistical testing ของ uniform RNG
  - Transform ดูคุณสมบัติเมื่อ Transform
    - Hadamard Transform(Generalized FT)
  - Complexity ความซับซ้อนของตัวเลข
    - Kolmogorov complexity

Midterm Preparation

- เก็บ 35 เปอร์เซ็นต์
- ไม่มีการ Make Up
- สอบ 3 ชั่วโมง บทที่ 1-6
  - Monday 7 March; 13:30 - 16:30
- ต้องใช้เครื่องคิดเลข
  - รุ่นตามที่คณะประกาศเท่านั้น ห้ามใช้อุปกรณ์อื่นๆ
- สมการที่สำคัญจะให้มา ไม่ต้องจำ
- **6 ข้อ บทละ 1 ข้อ รวม 6 ข้อ เลือกทำ 5 ข้อ**
  - **5 ข้อ 50 คะแนน คิดเป็น 35 %**

สมการที่ให้ในการสอบ MT

ข้อมูลที่น่าสนใจ

สูตรทั่วไป

$$e^{\pm jx} = \cos x \pm j \sin x$$

$$\sin x = \tfrac{1}{2j}(e^{jx} - e^{-jx})$$

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$$

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1$$

$$\int \sin ax\,dx = -\tfrac{1}{a}\cos ax$$

$$d(uv) = v\,du + u\,dv$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}, \quad 0 < a < 1$$

$$\binom{N}{k} = \frac{N!}{k!(N-k)!}$$

Vector/Matrix

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_3 \\ \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_3 \end{vmatrix},$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\text{adj } \mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}$$

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{1,j} \det(\mathbf{A}_{1,j})$$ (First Row Expansion)

Characteristic Equation $|\lambda I_n - A| = 0$,

Eigenvector $(\lambda I_n - A)X = 0$

Probability, RV, RP

$$P[E_i \setminus A] = \frac{P[E_i]P[A \setminus E_i]}{P[A]} = \frac{P[E_i]P[A \setminus E_i]}{\sum_{j=1}^{n} P[E_j]P[A \setminus E_j]}$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x^+} f_X(x)\,dx,$$

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

Binomial: $P[k] = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(X) f_X(x)\,dx$$

$$R_{XY}(m) = \sum X(n)Y(n+m)$$

Global Balance Equation:

$$p_j \sum_{i=0, i\neq j}^{\infty} P_{ji} = \sum_{i=0, i \neq j}^{\infty} p_i P_{ij}$$

Detailed Balance Equation:

$$p_i P_{ij} = p_j P_{ji}$$

II. Little's Theorem

$$N = \lambda T$$

$$N_Q = \lambda W$$

III. Poisson Distribution with Parameter m

$$p_n = \frac{e^{-m} m^n}{n!}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

mean = variance = m

IV. Exponential Distribution with Parameter λ

$$P[\tau \le s] = 1 - e^{-\lambda s}, \quad s \ge 0$$

Density: $p(\tau) = \lambda e^{-\lambda \tau}$

Mean: $= 1/\lambda$

Variance $= 1/\lambda^2$

(a) Utilization Factor (อัตราส่วนของเวลาที่ Server Busy)

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

(b) Probability ที่จะมี n customer ในระบบ

$$p_n = \rho^n (1-\rho), \quad n = 0, 1, \ldots$$

(c) จำนวนเฉลี่ยของ Customer ในระบบ

$$N = \frac{\rho}{1-\rho}$$

(d) เวลาเฉลี่ยของ Customer ในระบบ

$$T = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)} = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

(e) จำนวนเฉลี่ยของ Customer ใน Queue

$$N_Q = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

(f) เวลาเฉลี่ยที่ต้องรอใน Queue ของ Customer

$$W = \frac{\rho}{\mu - \lambda}$$

Review

- Chapter 1: Vector
  - Magnitude/Direction/Unit Vector
  - Direction Cosine
  - Component Vector/Position Vector
  - Dot/Cross Product and Properties
  - Equation of Line and Plane, Angle of Vectors
- Chapter 2: Matrices
  - Types of Matrices, Minor, Cofactor, Diagonal
  - Determinant by Expansion
  - Inverse of Matrix
  - Rank/Reduced Matrix (Process of Elimination)
  - Homogeneous/Non Homogeneous Linear Eq.

Review

- Chapter 3: Eigen Value/Vector/Diag
  - Eigenvalues
  - Eigenvectors
  - Diagonalization
  - Symmetric/Orthogonal Matrix
- Chapter 4: Probability
  - Conditional Probability/Bayes Rule
  - Random Variable
  - CDF/PDF/PMF; Poisson/Exponential Distribution
  - Expectation Concept
  - Mean, Mean Square, Variance
  - Joint Random Variable, Correlation/Covariance

Review

- Chapter 5: Random Process
  - Stationary/Ergodic
  - Autocorrelation/Cross Correlation
  - Counting/Poisson Process/Birth and Death Process
  - MarKov Model; Global Balanced Equation
  - Simple MarKov Model; Detail Balanced Equation
- Chapter 6: Queuing System
  - M/M/1 Concept
  - Arrival Rate/Inter Arrival Time
  - Departure Rate/Service Time
  - Utilization, P[X=k], P[X<=k]
  - Average Customer(System/Q), Time(System/Q)